25-11-15

Εφαρμογή

$F(u)=\frac{1}{2}u^2 \Rightarrow (RH): \frac{1}{2}(u^A(p))^2-\frac{1}{2}(u^\Delta(p))^2=m(u^A(p)-u^\Delta(p))$

$\Rightarrow m=\frac{1}{2}(u^A(p)+u^\Delta(p))$

Π.χ. $\begin{cases} u_t+uu_x=0 & \text{στο } U \\ u=\varphi & \text{στο } \mathbb{R}\times\{0\} \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} 2, & x<0 \\ 2-x, & x\in(0,1) \\ 1, & x>1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ κλασική λύση για $t<1$:

$$u_K(x,t)=\begin{cases} 2, & x\leq 2t \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t<x<t+1 \\ 1, & x\geq t+1 \end{cases}$$

Κατασκευή γενικευμένης λύσης για $t\geq 1$.

$u^A(x,t)=2$ αριστερά της ημιευθείας $x=mt+b$

$u^\Delta(x,t)=1$ δεξιά " " "

$\Rightarrow$ ημιευθεία ασυνέχειας θα είναι $x=\frac{3}{2}t+b \xrightarrow{(x,t)=(2,1)}$

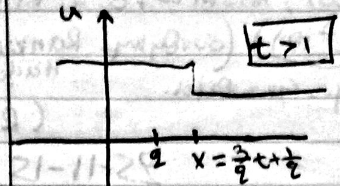
$x=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$

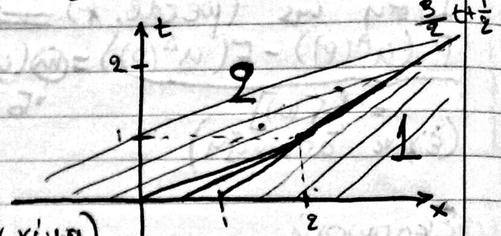
$\Rightarrow$ μία γενικευμένη λύση $\forall t\geq 0$ θα είναι

ΑΣΚ
[1.7, 1.8, 1.9, 1.10
1.13, 1.14, 1.15, (1.28)]

$$u(x,t) = \begin{cases} u_K(x,t) & t<1 \\ u_A(x,t), & t \geq 1 \end{cases}$$

και $$u_A(x,t) = \begin{cases} 2, & x < \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ 1, & x > \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}$$





κρουστικό κύμα (οδεύον κύμα)
που κινείται με ταχύτητα $\frac{3}{2} = \frac{dx}{dt}$

§2 Κυματική Εξίσωση

§2.1 Ταξινόμηση γραμμικών ΜΔΕ 2ης τάξης δυο μεταβλητών

γενική μορφή

(2.2) $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = f(x,y)$

όπου γενικά $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0, f$ είναι συναρτήσεις των x,y
με $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y) \in U$ [όπου άγνωστη $u: U \to \mathbb{R}$]

Η (2.2) μπορεί να γραφεί στη μορφή $Lu=f$, όπου L ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής

(2.1) $[L(au+bv) = aLu + bLv]$ $f=0 \to$ η (2.1) ονομάζεται ομογενής
$f \neq 0 \to$ η (2.1) ονομάζεται μη ομογενής

Συνέπεια: Αν $u_1, \dots, u_n$ λύσεις της ομογενούς (2.1)
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ λύση της (2.1) [αρχή της υπέρθεσης/επαλληλίας]

και αν u_1 λύση της $Lu=f$ και u_2 λύση της $Lu=0$ $\Rightarrow u_1+u_2$ λύση της $Lu=f$

u_1 ειδική λύση και επίσης αν u_1, u_2 λύσεις της $Lu=f$, τότε u_1-u_2 λύση της $Lu=0$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Αν $\det A>0 \Rightarrow$ η (2.2) λέγεται ελλειπτική
Αν $\det A<0 \Rightarrow$ η (2.2) " υπερβολική
Αν $\det A=0 \Rightarrow$ " " " παραβολική

Παρατήρηση: Η ταξινόμηση γίνεται μόνο σύμφωνα με τους συντελεστές ανώτερης τάξης
[Ονόματα: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0$ είναι έλλειψη αν $\det A>0$, υπερβολή αν $\det A<0$ και παραβολή αν $\det A=0$]
Τα παραπάνω ισχύουν αντίστοιχα σε κάθε (x,y) σημ. (αν οι συντελεστές είναι συναρτήσεις) και τότε μπορεί να έχουμε μια ΜΔΕ διαφορετικών τύπων για διαφορετικά (x,y)
Π.χ: Εξίσωση Tricomi: $u_{yy}-yu_{xx}=0$ η οποία είναι ελλειπτική για $y<0$, υπερβολική για $y>0$, παραβολική για $y=0$

Εξίσωση Laplace: $u_{xx}+u_{yy}=0$, ελλειπτική
Εξίσωση κύματος: $u_{tt}-u_{xx}=0$, υπερβολική
Εξίσωση Θερμότητας: $u_t-u_{xx}=0$, παραβολική

Θεώρημα (Βασικές μορφές ελλειπ, υπερβ, παραβ εξίσωσης)
Με γραμμικό μετασχηματισμό η (2.2) θα παίρνει την μορφή $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{μερικές παραγ. ως προς } \xi,\eta \text{ 1ης τάξης}}=g$, ανν η (2.2) ελλ.

$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+\ldots\ldots=g$ " " υπερβ.
$u_{\xi\xi}+\ldots\ldots=g$ " " παραβ.

(έγινε απόδειξη) (να την δω)

Ασκ: 2.1, 2.2